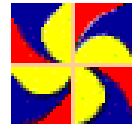




CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo

www.bassalo.com.br



Álgebra dos Quatérnios.

Em verbete desta série, vimos que o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) publicou, em 1853, seu célebre livro intitulado **Lectures on Quaternions**, no qual desenvolveu a Álgebra Não Comutativa de novos números que ele chamou de **quatérnios** (q), que seriam a “generalização” dos **números complexos** ($a + i b$, sendo a e b números reais e $i = \sqrt{-1}$) (que pertencem a um espaço 2-dimensional) e que poderiam naturalmente ser estendidos a um espaço 3-dimensional.

Conforme nos contam os ingleses, o matemático e historiador Ian Stewart (n.1945) [**Uma História da Simetria na Matemática** (Zahar, 2012)] e o físico e filósofo Roger Penrose (n.1931) [**The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe** (Alfred A. Knoff, 2005)]; aproveito a oportunidade para agradecer ao meu amigo, o físico brasileiro Sérgio Cavalcante Guerreiro (n.1942), pela oferta de um exemplar desse livro], a busca por essa nova estrutura algébrica tridimensional e não comutativa foi uma constante em sua vida por acreditar que ela representava a chave para quase tudo na vida.

Segundo esses autores (associado a verbetes da Wikipédia sobre a biografia de Hamilton), em uma segunda-feira, dia 16 de outubro de 1843, ele e sua esposa Helen Maria Bayly atravessavam a *Broome Bridge* [ponte essa denominada por Hamilton de “Brougham”) sobre o *Royal Canal*, em Cabra, Dublin, pois Hamilton se dirigia para presidir uma Reunião da *Royal Irish Academy* (RIA) (“Real Academia Irlandesa”)], quando veio à mente de Hamilton as fórmulas que envolviam os tripletos (**i, j, k**) fundamentais dos **quatérnios** e imediatamente gravadas por ele em um dos pilares da ponte (certamente sob o olhar atônito de sua mulher, pois elas respondiam às perguntas que seus filhos (William Edwin e Archibald Henry, respectivamente, com 8 e 9 anos) lhe faziam todas as manhãs, em 1842: - *Então Papai, você já conseguiu multiplicar seus*

esperados tripletos?): $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Esse “lampejo” de sua mente foi comunicado a um amigo em uma carta, dizendo-lhe: - *Ali e naquele momento eu senti o circuito galvânico do pensamento se fechar e as faíscas que se soltaram eram as equações fundamentais entre i, j, k; exatamente as que eu tinha usado desde sempre* (Stewart, op. cit.). É interessante registrar que, em 1958, a RIA colocou uma placa nessa ponte com os dizeres (tradução livre): - *Aqui, quando Sir William Rowan Hamilton a atravessou no dia 16 de Outubro de 1843, em “flash” sua mente de gênio descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quatérnios - $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ - e a gravou em uma pedra desta ponte.* (en.wikipedia.org/Broom_Bridge).



Tomando as equações inscritas na ponte “Brougham” [e que indicavam que seus tripletos valem: $i = j = k = \sqrt{-1} (\neq 0)$] e considerando que o produto de dois deles é anticomutativo e, portanto, as multiplicações e as divisões envolvendo-os tem que ser realizadas pela direita ou pela esquerda, Hamilton demonstrou as seguintes equações: $ij = k$ (1); $jk = i$ (2); $ki = j$ (3); $ij = -ji$ (4); $jk = -kj$ (5); $ki = -ik$ (6). A seguir, vejamos a demonstração das mesmas:

Equação (1) - Tomando a identidade $ijk = -1$ e considerando que $k^2 = -1$, teremos: $ijk = k^2 (= kk)$; dividindo (pela direita) esta expressão por k , obteremos que: $ij = k$;

Equação (2) – Tomando a identidade $ijk = -1$ e considerando que $i^2 = -1$, virá: $ijk = i^2 (= ii)$; dividindo (pela esquerda) esta expressão por i , resultará: $jk = i$;

Equação (4) - Tomando a equação (2), multiplicando (pela esquerda) por j e considerando que $j^2 = -1$, resultará: $j^2k = ji \rightarrow -k = ji$ que, comparada com a (1), decorrerá: $ij = -ji$;

Equação (3) – Tomando a equação (1), multiplicando (pela direita) por i , usando a (4) e sendo $i^2 = -1$, teremos: $iji = ki \rightarrow -jii = ki \rightarrow ki = j$;

Equação (5) - Tomando a equação (1), multiplicando (pela direita) por j , considerando que $j^2 = -1$ e usando a (2), virá: $ijj = kj \rightarrow -jk = kj \rightarrow jk = -kj$;

Equação (6) - Tomando a identidade $ijk = -1$, usando a (4), seguido de $j^2 = -1$, dividindo (pela esquerda) por j e considerando a (3), obter-se-á: $-jik = -1 \rightarrow -jik = j^2 (= jj) \rightarrow -ik = j \rightarrow -ik = ki \rightarrow ki = -ik$.

Ainda é oportuno registrar que essas equações permitem demonstrar que o produto dos tripletos de Hamilton é associativo [$(ij)k = i(jk)$]. Com efeito, partindo de $(ij)k$, usando a (1) e $k^2 = kk = -1$, resultará: $(ij)k = kk = -1$. Por sua vez, partindo de $i(jk)$, considerando a (2) e $i^2 = ii = -1$, obtém-se que: $i(jk) = ii = -1$. Comparando os dois resultados, podemos escrever que: $(ij)k = i(jk)$.

De posse dessa Álgebra Não-Comutativa, Hamilton definiu (como registramos acima) um ente matemático denominado por ele de **quatérnio**: $q = t + u i + v j + w k$, sendo t, u, v, w números reais (que obedecem a uma álgebra comutativa). Além do mais, em analogia com os números complexos para os quais o seu **conjugado** (*) é obtido fazendo $i = -i$, então Hamilton definiu o **conjugado** de q (q^*), usando essa troca para os seus tripletos, ou seja: $i = -i, j = -j$ e $k = -k$, o que resultou na expressão: $q^* = t - u i - v j - w k$. Usando suas seis equações e, também, suas definições de i, j, k , Hamilton obteve que: $qq^* = q^*q = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$. (Penrose, op. cit.; en.wikipedia.org/quaternions).



ANTERIOR

SEGUINTE