



CURIOSIDADES DA FÍSICA

José Maria Filardo Bassalo

www.bassalo.com.br



O Prêmio Nobel de Física de 2016: Parte 1 – Thouless.

O PNF/2016 foi compartilhado pelos físicos norte-americanos [radicados nos Estados Unidos da América (EUA)] David James Thouless (n.1934) (de origem escocesa), que recebeu a metade e, a outra metade foi dividida, por Frederick Duncan Michael Haldane (n.1951) (de origem inglesa) e John Michael Kosterlitz (n.1942) (de origem escocesa) - *por descobertas teóricas das transições de fase topológicas e fases topológicas da matéria* -, segundo o Comitê Nobel (CN). Destaque-se que esses nobelistas elaboraram seus trabalhos teóricos, principalmente, nos anos de 1970 e 1980 (como descreveremos neste artigo), em uma época em que ninguém imaginava que a *Topologia* pudesse ser usada como ferramenta para qualquer coisa prática. Hoje, contudo, ela é essencial para entender os sistemas físicos, com destaque para os [supercondutores](#), os [isolantes topológicos](#), os [vidros de spin](#), na [computação quântica](#) e no estudo de materiais bidimensionais (*Física 2D*) como, por exemplo, o [grafeno](#). Registre-se que esse verbete sobre o PNF/2016, será dividido em três partes, sendo estas constituídas de um breve resumo da vida e dos trabalhos dos Nobelistas.

Thouless nasceu em 21 de setembro de 1934, em Bearsden, na Escócia (sendo hoje cidadão inglês). Realizou sua formação graduada, entre 1947 e 1952, no *Winchester College*, em Winchester, capital do condado de Hampshire (Inglaterra). Recebeu o grau de *Bacharel em Artes*, pelo *Trinity Hall*, um dos *Colleges* da *University of Cambridge* (UC) [também conhecida como *Cambridge University* (CU)], ainda na Inglaterra, em 1955. Sob a orientação do físico germano-norte-americano Hans Albrecht Bethe (1906-2005; PNF, 1967), Thouless defendeu a Tese de Doutorado intitulada [The Application of Perturbation Methods to the Theory of Nuclear Matter](#), em 1958, na *Cornell University*, nos Estados Unidos da América (EUA). Depois de realizar um Pós-Doutoramento na *University of California* (UC), em Berkeley, Thouless foi convidado, em 1961, para ser o primeiro *Director of Studies in Physics*, do *Churchill College*, da UC/CC, convite esse acompanhado de uma *Visiting Fellow* (“Professor Visitante”), permanecendo nesta posição até 1965. Neste ano, ele foi trabalhar com o físico germano-inglês Sir Rudolf Ernst Peierls (1907-1995), na *University of Birmingham* (UB), na Inglaterra, na qual se tornou *Professor de Física-Matemática*, ficando na mesma até 1978, quando voltou para os EUA, para a *Yale University*, como *Professor de Ciência Aplicada*, entre 1979 e 1980 e, por fim, neste ano de 1980, foi ser *Professor de Física* da *University of Washington* (UW), em Seattle, até 2003, quando recebeu o título de *Emeritus Professor of Physics*. É oportuno registrar que sua esposa Margaret Elizabeth (Scrase) Thouless (com quem casou em 1958) foi *Professora Associada de Pathobiologia*, na UW, entre 1980 e 2004.

Além do PNF/2016 (sem *Nobel Lecture*), Thouless recebeu outras honrarias (*fellows, medals, members, prizes e doctorates*), com destaque para: 1) **Maxwell Medal and Prize** [*Institute of Physics* (IOP) (Inglaterra e Irlanda), em 1973]; 2) **Fellow of**

the Royal Society (FRS) (*Royal Society of London*, em 1979); 3) **Doctorate of Science** [Clare Hall (College of Cambridge University), em 1985]; 4) **Wolf Prize in Physics** (Wolf Foundation, em 1990); 5) **Dirac Medal** (IOP, em 1993); 6) **Member of the U.S. National Academy of Sciences**, em 1995; e 7) **Lars Onsager Prize** (*American Physical Society*, em 2000).

Os trabalhos de Thouless que o levaram ao nobelato foram iniciados na UB (1965-1978) quando, usando métodos **topológicos** complexos, estudou problemas de muitos-corpos, que permitiram a compreensão dos sistemas extensos de átomos e elétrons e dos [núcleons](#) (prótons e nêutrons), os chamados sistemas bidimensionais (**Física 2D**). Note-se que a *Topologia* é uma parte da *Matemática* que permite estudar as propriedades de objetos que permanecem constantes mesmo se eles foram dobrados ou deformados, mas nunca rompidos. Por exemplo, quando se deforma um quadrado em um círculo ou um tubo (que é uma superfície cilíndrica) em um toroide (superfície toroidal), ambos são topologicamente iguais, pois têm apenas um buraco. Um aspecto importante a registrar é que objetos assim tratados só podem ter um número inteiro de buracos (p.ex.: 0, 1 ou 2), mas nunca 1,5 buraco.

Vejam os trabalhos como aconteceram aqueles trabalhos. Na UB, Thouless teve como um de seus colaboradores realizando pós-doutorado, o futuro nobelista Kosterlitz. Em vista dessa colaboração, em 1972, Kosterlitz e Thouless discutiram a ideia sobre um novo tipo de ordenamento de spins nos materiais ferroelétricos, denominado de **ordem de longo alcance topológico**, relacionado com a presença de vórtices. Então, juntos, demonstraram que existem estados metaestáveis correspondendo a vórtices que são estreitamente ligados em pares quando abaixo da **temperatura Curie** (temperatura acima da qual uma substância ferromagnética se comporta como paramagnética), enquanto acima da mesma eles se encontram livres. Nesse trabalho, eles também identificaram um novo tipo de transição (discreta) em sistemas bidimensionais [sistemas esses que foram (e são) importantes para o estudo e construção das **nanomáquinas**, objeto do PNF/2016], segundo o qual **defeitos topológicos** representam um papel fundamental. Note-se que essa ideia de Kosterlitz-Thouless (**Transição de Kosterlitz-Thouless**) também se aplica ao entendimento de filmes supercondutores e superfluidos e, também, ela é muito importante para compreender a teoria quântica de sistemas unidimensionais em temperaturas muito baixas. Essa ideia foi por eles apresentada em dois artigos: 1) **Long Range Order and Metastability in Two-Dimensional Solids and Superfluids** [*Journal of Physics C: Solid State Physics* **5**, p. 124 (1972)]; e 2) **Ordering, Metaestability and Phase Transitions in Two-Dimensional Systems**, [*Journal of Physics C: Solid State Physics* **6**, p. 1181 (1973)]. É interessante destacar que, como o físico russo Vadim L'vovich Berezinskii (1935-1980) havia descoberto antes [*Zhurnal Eksperimental'noi Teoretiskoi Fiziki* **59**, p. 907 (1970)/ *Soviet Physics JETP*, **32** (3), p. 493 (1971); *Zhurnal Eksperimental'noi Teoretiskoi Fiziki* **61**, p. 1144 (1971)/ *Soviet Physics JETP*, **34** (3), p. 610 (1972)] o papel de **defeitos topológicos** em transição de fase naqueles sistemas bidimensionais em baixa temperatura com uma simetria contínua; essa transição é hoje conhecida também como **Transição de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless**.

Registre-se que novos trabalhos de Thouless e Kosterlitz (alguns com outros colaboradores), também na linha da **Física 2D**, foram publicados e ainda na década de

1970, a saber: 1) **Spherical Model of a Spin Glass** [*Physical Review Letters* **36**, p. 1277 (1976); *Physica* **86-88B**, p. 785 (1977)], com o físico norte-americano Robert Clark Jones (1916-2004); 2) **Infinite Range Spin Glass with M-Component Spins** [*Journal of Physics C: Solid State Physics* **11**, p. L871 (1978)], com Jones e J. R. L. de Almeida; 3) **Physics in Two Dimensions, IV**: D. F. Brewer (Editor), **Progress in Low Temperature**, Volume **7-B**, p. 373 (North Holland, Amsterdam, 1978); 4) **Eigenvalue Spectrum of a Large Random Matrix with Finite Mean** [*Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General* **11**, p. L45 (1978)], com Jones; e 5) **Stability and Susceptibility in Parisi's Solution of a Spin Glass Model** [*Journal of Physics C: Solid State Physics* **13**, p. 3271 (1980)], com Almeida. É oportuno registrar que Almeida publicou o seguinte artigo e apenas com Thouless: **Stability of the Sherrington-Kirkpatrick Solution of a Spin Glass Model**, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **11**, p. 983 (1978), e que Thouless, e os físicos norte-americanos Philip Warren Anderson (n.1923; PNF, 1977) e Richard G. Palmer (n.1949) (nascido na Inglaterra) investigaram o modelo acima referido no texto: **Solution of Solvable Model of a Spin Glass**, *Philosophical Magazine* **35**, p. 593 (1977).

A *Topologia* também foi usada por Thouless, para entender o **Efeito Hall Quântico** (EHQ). Antes, vejamos o que é esse efeito e seus dois aspectos: **Inteiro** e **Fracionário**. Em outubro de 1879 (*American Journal of Mathematics* **2**, p. 287), o físico norte-americano Edwin Herbert Hall (1855-1938) realizou na *Universidade Johns Hopkins*, nos EUA, uma experiência na qual observou que quando uma longa lâmina de ouro (Au) e percorrida longitudinalmente por uma corrente elétrica I , é colocada normalmente às linhas de força de um campo de indução magnética \mathbf{B} constante, surge, entre as laterais dessa mesma lâmina, uma diferença de potencial V_H , dada por: $V_H = IR_H$, onde R_H ficou conhecida como **resistência Hall**, que é diretamente proporcional a B (módulo de \mathbf{B}): $R_H = B/(ne)$, com n representando a densidade eletrônica por cm^3 , e e é a carga elétrica do elétron. Assim, estava descoberto o que ficou conhecido como **Efeito Hall Clássico** (EHC).

Em 1980, quando Thouless foi para a UW, houve uma descoberta fantástica que mudou o EHC. Com efeito, naquele ano de 1980 (*Physical Review Letters* **45**, p. 494), os físicos, os alemães Klaus von Klitzing (n.1943; PNF, 1985) e Gerhard Dorda (n.1932) e o inglês Sir Michael Pepper (n.1942), publicaram um artigo (*Physical Review Letters* **45**, p. 494), no qual anunciaram uma descoberta sensacional: R_H não variava linearmente com B , como no caso clássico. Os gráficos dessa variação lembravam uma escada, com cada degrau separado pelo valor $h/(e^2i)$, onde h é a **constante de Planck**, e $i = 1, 2, 3, \dots$, é um **número quântico inteiro** apropriado.

Expliquemos o significado físico do **número quântico i** . Classicamente, elétrons sob a ação de um campo magnético intenso (\mathbf{B}) descrevem órbitas circulares (“órbitas de ciclotron”) em consequência da **força de Lorentz** [conceituada pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902), em 1892 (*Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles* **25**, p. 363)], por intermédio de sua célebre expressão (na linguagem atual): $\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, onde \mathbf{v} é a velocidade da carga elétrica q . Ora, quanticamente, existe somente um conjunto discreto de órbitas permitidas com energias também discretas, que caracterizam os **níveis de Landau** (NL) [proposto pelo físico russo Lev Davidovich Landau (1908-1968; PNF, 1962), em: Lev Landau et Evgeny Lifc(s)hitz, **Mécanique Quantique: Théorie Non Relativiste** (Éditions Mir, 1966)], cuja energia vale: $E_L = h e B/(2\pi m)$, onde m representa a massa do elétron

(e). Porém, como sabemos que os elétrons com energia no interior de uma banda de energia participam da corrente de condução, a conhecida **banda de condução**, então, nos intervalos (“gaps”) entre as bandas, os elétrons só podem ocupar os poucos níveis isolados, que são estados localizados que não participam da corrente de condução. Portanto, a ocupação desses níveis isolados não altera a resistência, resultando nos degraus observados. Desse modo, o **número quântico** i indica as **bandas de Landau** totalmente preenchidas até um dado degrau. Como o i é um número inteiro, essa descoberta de von Klitzing, Dorda e Pepper recebeu o nome de **Efeito Hall Quântico Inteiro** (EHQI).

Por sua vez, em 1982 (*Physical Review Letters* **48**, p. 1559), os físicos norte-americanos Horst Ludwig Störmer (n.1949; PNF, 1998) (de origem alemã), Daniel Chee Tsui (n.1939; PNF, 1998) (de origem chinesa) e Arthur Charles Gossard (n.1935) descobriram que: $R_H = \phi_0 / [(1/3) i e]$, sendo $\phi_0 = h/e$, o **fluxo quântico magnético**. Essa nova descoberta recebeu o nome de **Efeito Hall Quântico Fracionário** (EHQF). Observe-se que esses efeitos (EHQI/F) foram explicados pelo físico norte-americano Robert B. Laughlin (n.1950; PNF, 1998), como veremos a seguir.

Em 1979, Laughlin defendeu sua Tese de Doutorado no MIT com o físico norte-americano John D. Joannopoulos (n.1947), que liderava o grupo de pesquisa em *Física do Estado Sólido* (hoje: *Física da Matéria Condensada*). No ano seguinte, em 1980 (o ano da descoberta do EHQI), ele trabalhava na *Bell Laboratories*, em Murray Hill/New Jersey. Em certo dia daquele ano, na sala de chá da *Bell*, Tsui conversava com um pequeno grupo de teóricos desse Laboratório, no qual se encontravam os físicos norte-americanos Philip Warren Anderson (n.1923; PNF, 1977) e Laughlin, e, com o trabalho daqueles físicos na mão, perguntou como aquele efeito poderia ser explicado. Sua dúvida decorria do fato de que os trabalhos teóricos até então realizados sobre a **localização** na referida **Física 2D** não o conseguiam explicar. Registre-se que o conceito de **localização** (estado isolante quando um metal não-interagente é submetido a um grande potencial randômico) havia sido formulado por Anderson, em 1958 (*Physical Review* **109**, p. 1492; **112**, p. 1900). Depois de ouvir Tsui, Anderson sugeriu que, para explicar o EHQI, era necessário considerar a transformação de calibre (“gauge”) do **potencial vetor** \mathbf{A} : $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{A}_0$, com \mathbf{A}_0 considerado como um vetor constante e sem significado físico. Para dar um significado físico a esse vetor, Laughlin imaginou uma “experiência de pensamento”, na qual a fita metálica característica do EHC é enrolada em forma de anel (“loop”). Com isso, Laughlin demonstrou, em 1981 (*Physical Review* **B23**, p. 5632), que o módulo de \mathbf{A}_0 (A_0) relaciona-se com o fluxo ϕ_0 que passa pelo anel. Desse modo, considerando que esse fluxo, que é adiabaticamente forçado através do anel, é o que leva o elétron do **Nível de Fermi** (NF) de uma extremidade para a outra da fita. Laughlin encontrou o valor de R_H do EHQI obtido por von Klitzing, Dorda e Pepper, dividindo esse fluxo pelo produto da carga elétrica do elétron (e) pelo número de ocupação (i) do NF. Note-se que a energia do NF é dada por: $E_F = -\alpha k T$ onde α é um parâmetro e que depende da temperatura absoluta T , do número de moléculas e da distribuição dos possíveis níveis de energia, e k é a **constante de Boltzmann**. Essa E_F significa a energia mais alta em que, no zero absoluto ($T = 0$), o elétron pode ocupar em sua distribuição energética. A superfície para a qual E_F é constante chama-se **superfície de Fermi**. É oportuno ainda registrar que E_F nos condutores situa-se na **banda de condução**; nos isolantes, na **banda de valência**; e nos semicondutores, no intervalo (“gap”) entre essas duas bandas. [Charles Kittel,

Introduction to Solid State Physics (John Wiley and Sons, 1971); John Michael Ziman, **Principles of the Theory of Solids** (Cambridge University Press, 1972); e Rogério César de Cerqueira Leite e Antônio Rubens Britto de Castro, **Física do Estado Sólido** (Editora Edgard Blücher Ltda., 1978)].

Agora, vejamos a explicação do EHQF apresentada por Laughlin. Ainda em 1981, ele foi trabalhar no *Lawrence Livermore National Laboratory*, em Livermore, na Califórnia. Nesse Laboratório, ele vinculou-se ao grupo de plasma que tinha como principais teóricos os físicos norte-americanos Hugh Edgar DeWitt (1930-2014) e Forest Rogers. Enquanto realizava seu trabalho de pesquisa no anexo daquele Laboratório conhecido como “*The Cooler*”, sobre o modelamento da matéria em energias da ordem de 10 eV, Laughlin recebeu o “*preprint*” do artigo de Tsui, Störmer e Gossard sobre a descoberta do EHQF. Essa descoberta apresentava um resultado surpreendente, isto é, a R_H por eles observada significava três vezes a mesma resistência do EHQI. Depois de ler o artigo, Laughlin telefonou a Störmer e, ao perguntar-lhe como explicar esse surpreendente resultado, recebeu então a informação de que Tsui, inicialmente, pensara tratar-se de **quarks** [conceito introduzido, independentemente, em 1964, pelos físicos, o norte-americano Murray Gell-Mann (n.1929; PNF, 1969) (*Physics Letters* **8**, p. 214) e o russo-norte-americano George Zweig (n.1937) (*CERN Preprint*, **8182/Th 401**; **8419/Th 412**)], pois o valor de R_H encontrado correspondia a uma partícula com a carga elétrica de $e/3$. Contudo, Störmer disse-lhe em seguida, que o próprio Tsui logo viu a impossibilidade dessa hipótese, uma vez que a experiência que realizaram tratavam com energia da ordem de mili-elétronvolt ($1 \text{ meV} = 10^{-3} \text{ eV}$), insuficiente para produzir **quarks**, que é da ordem de mega-volts ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$).

Conhecedor dessa informação, Laughlin procurou outra explicação para o EHQF. Conversando com seu estudante Eugene L. Mele sobre o conceito de **quase-partícula**, usado em Física de Partículas Elementares e em Física do Estado Sólido, Laughlin pensou em explicar aquele efeito como sendo devido a um condensado de muitos-corpos com excitações correspondentes a uma **quase-partícula** de carga $e/3$. Com essa ideia em mente, preparou um artigo e o enviou para a *Physical Review Letters* (PRL). Nesse artigo, ele mostrou que a **quase-partícula** observada no EHQF decorria de uma quebra de simetria discreta. No entanto, um dos “referees” [o físico norte-americano Steve Allan Kivelson (n.1954), conforme Laughlin veio a saber, ao ser anunciado que havia compartilhado o PNF de 1998] da PRL rejeitou-o, afirmando que a quebra de simetria considerada por Laughlin não era discreta e sim contínua e, portanto, sua ligação com impurezas poderia tornar isolante o material utilizado por Tsui, Störmer e Gossard. Apesar de já saber que isso era verdade enquanto preparava o artigo, Laughlin decidiu, assim mesmo, enviá-lo para a PRL, pois achava ser irrelevante esse fato. Essa rejeição foi providencial, pois lhe ajudou a encontrar a explicação correta para o EHQF, conforme veremos mais adiante. Antes, façamos alguns comentários sobre o conceito de **quase-partícula**. Note-se que este conceito foi proposto, em 1976 (*Physical Review* **D13**, p. 3398), pelos físicos, o polaco-norte-americano Roman Wladimir Jackiw (n.1939) e o italiano Claudio Rebbi (n.1943), em um trabalho em que apresentaram a ideia de que existem partículas que podem carregar parte de um número quântico elementar. Essa **quase-partícula** é também conhecida como **sóliton topológico** ou **partícula kink**.

Voltemos ao trabalho teórico de Laughlin sobre o EHQF. Em 1983 (**Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations**, *Physical Review Letters* **50**, p. 1395), ele explicou esse efeito ainda usando a ideia de **quase-partícula**, porém, com outra interpretação. Vejamos qual. Inicialmente, Laughlin mostrou que um gás de elétrons, sob um campo magnético intenso [~ 15 T (Tesla)] e temperatura baixa (~ 0.48 K) (dados da experiência de Tsui, Störmer e Gossard), pode se condensar para formar um **fluido quântico** similar ao que ocorre com o hélio líquido e os supercondutores. No entanto, para explicar as cargas fracionárias características do EHQF, Laughlin imaginou uma experiência de pensamento, análoga à que considerou na explicação do EHQI, envolvendo o **fluxo quântico magnético** ($\phi_0 = h/e$). Como os elétrons sofrem repulsão coulombiana, considerou que o condensado envolvia estruturas compostas de elétrons e de pequenos **vórtices**, um para cada fluxo quântico magnético. Desse modo, concluiu que o **fluido quântico** proposto comportava-se como um “superfluido” e que, quando excitado, por intermédio de mais elétrons e **vórtices** (“quantizados”), reage formando novos estados coletivos (**quase-partículas** ou excitações coletivas), com carga elétrica efetiva “fracionária”. Ora, como para criar esses estados é necessário um consumo de energia, o “superfluido” resiste à compressão e, portanto, torna-se “incompressível”. Assim, segundo Laughlin, o comportamento quântico dessas **quase-partículas** é descrito por um Hamiltoniano [**Hamiltoniano de Laughlin** (HL)] aplicado a seguinte **função de onda de Laughlin**:

$$\Psi_m(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m \exp \left\{ \left[-1/(4 \ell^2) \right] \sum_j^N |z_j|^2 \right\},$$

onde m é um inteiro ímpar (igual a 3, no caso da experiência inicial de Tsui, Störmer e Gossard), que significa o número de **vórtices** (“quantizados”) do fluxo ϕ_0 , $z_j = x_j + i y_j$, representa a posição do j -ésimo elétron, e $(m)^{1/2} \ell$ é o **comprimento magnético**. É interessante notar que a ideia de essa **função de onda** representar um **fluido quântico**, em vez de um estado cristalino, foi desenvolvida por Laughlin depois de consultar livros de *Mecânica Estatística* e de discutir com DeWitt e Rogers, em Livermore.

Por fim, vamos concluir a contribuição de Thouless para o PNF/2016, destacando alguns de seus artigos relacionados com a explicação topológica do EHQ, na década de 1980, na UW, trabalhando com físicos que faziam o doutoramento e pós-doutoramento com ele. Logo em 1981 ([Journal of Physics C: Solid State Physics](#) **14**, p. 3475), Thouless usou o conceito de **localização** para explicar o EHQ bidimensional, no artigo: **Localization and the Two-Dimensional Hall Effect**. Em 1982 (*Physical Review Letters* **49**, p. 405), Thouless e Mahito Kohmoto, Peter M. Nightingale e Marcel den Nijs publicaram o texto: **Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential**, no qual a **Condutância Quântica Hall** ($C_H = 1/R_H$) de um gás eletrônico bidimensional é estudada em um campo magnético uniforme sob um potencial periódico U . Neste artigo, a **Fórmula de Kubo** (FK) [deduzida pelo físico japonês Ryogo Kubo (1920-1995), em 1957 (*Journal of the Physical Society of Japan* **12**, p. 570), e que expressa a resposta linear de uma quantidade observável devido a uma perturbação temporal] é deduzida de modo que a quantização aparece quando os NF (**Nível de Fermi**) estão em um intervalo (“*gap*”). Por esta razão, a FK é hoje conhecida como a **Fórmula de TKNN** (FTKNN). Logo em 1983, por ocasião da *5th International*

Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems, realizada em Oxford, na Inglaterra, Thouless discutiu o problema da quantização de sistemas de muitos-corpos e bidimensionais. [É importante anotar que Thouless havia discutido esses sistemas em seu livro: **The Quantum Mechanics of Many-Body Systems** (*Pure and Applied Physics Series*, Academic Press, 1972)]. Dois anos depois, em 1985 (**Quantized Hall Conductance as a Topological Invariant**, *Physical Review* **B31**, p. 3372), Thouless e mais dois físicos de origem chinesa, Qian Niu e Yong-Shi Wu, generalizaram o artigo que Thouless havia escrito com Kohmoto, Nightingale e den Nijs e, ao aplicarem o EHQF observaram que deveria haver uma quebra de simetria no estado fundamental de um sistema de muitos-corpos. Com isso, eles demonstraram a possibilidade de a **Condutância Quântica Hall Fracionária** ser um invariante topológico. Em 1987 (**Quantum Hall Effect with Realistic Boundary Conditions**, *Physical Review* **B35**, p. 2188), Thouless e Niu examinaram trabalhos anteriores sobre a dependência do EHQ das condições de fronteira (“*boundary conditions*”) (p. ex.: cilíndrica e toroidal) e, comparando-as com as experiências reais [principalmente as que exibiam quantização (representadas por riscas)], verificaram que havia uma discrepância entre esses resultados. Então, usando o conceito de **quase-partícula** de Laughlin (para explicar o EFHQF) e o trabalho de Thouless, Niu e Wu, os dois (Niu e Thouless) concluíram que a correção de fronteira para a C_H é exponencialmente pequena quando o tamanho do sistema físico considerado é grande comparado com o comprimento microscópico magnético.

Ainda é oportuno salientar que Thouless registrou o papel da *Topologia* na *Física Não-Relativística*, no livro intitulado: *Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics* (World Scientific Publishing Company, 1998).



ANTERIOR

SEGUINTE